Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Struttura dell'Esame Scritto

Struttura dell'Esame Scritto

Indicativamente, l'esame scritto conterrà:

- Un esercizio di modellazione
- Due/tre esercizi di
  - Analisi di codice, codifica di algoritmi noti, esecuzione di algoritmi, rappresentazione dei numeri
- Alcune domande di teoria brevi

Sono possibili (ma improbabili) variazioni

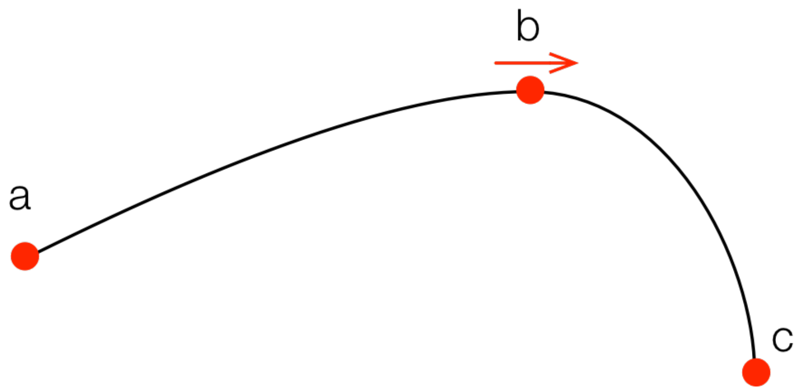
- Il tempo disponibile sarà di due ore
- Il punteggio massimo sarà superiore a 30...
- Quindi si può superare l'esame a pieni voti anche con alcuni errori

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio 1 (modellazione)

Esercizio 1

Si vuole progettare parte di un circuito automobilistico:



- Il tratto deve essere descrivibile con una curva polinomiale
- Il tratto deve passare per i punti a, b, c
- La posizione di a, b, c è nota
- La tangente in b deve essere orientata secondo la freccia rossa

Esercizio 1

Si considerino i seguenti problemi:

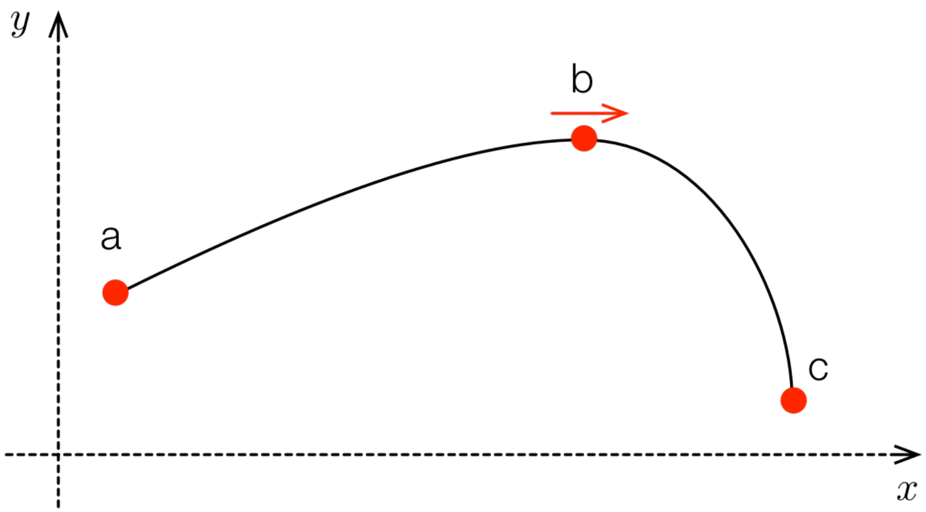
- **Q1:** Come si può ottenere l'equazione del circuito?
- **Q2:** Come si può calcolare la lunghezza del tratto?
- **Q3:** Sia d un terzo punto sulla curva
  - Per quali coordinate di d la distanza tra a e d…
  - …È pari ad un dato valore λ?

NOTA: La domanda Q3 è tendenzialmente la più complessa

- Non spaventatevi: ragionate più che potete
- Non è necessario fare un compito perfetto per avere 30!

Soluzione (Q1)

Innanzitutto ci serve un sistema di riferimento:



A questo punto possiamo riferirci alle posizioni di a, b, c con:

$$a \leftrightarrow (x_a, y_a) \qquad b \leftrightarrow (x_b, y_b) \qquad c \leftrightarrow (x_c, y_c)$$

Soluzione (Q1)

La curva è descritta da una funzione polinomiale:

$$f_\beta(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^{(n-j)}$$

Possiamo determinare i coefficienti risolvendo:

$$f_\beta(x_a) = y_a$$
$$f_\beta(x_b) = y_b$$
$$f_\beta(x_c) = y_c$$
$$f'_\beta(x_b) = 0$$

- Ci sono 4 equazioni, quindi f deve essere almeno di 3° grado
- Il sistema è lineare in β

Soluzione (Q1)

Poiché f è di 4° grado, posso scrivere:

$$f_\beta(x) = \beta_0 x^3 + \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3$$

Mentre la derivata è data da:

$$f'_\beta(x) = 3\,\beta_0 x^2 + 2\,\beta_1 x + \beta_2$$

NOTA: β è il vettore dei coefficienti

- Li consideriamo come parametri
- Di fatto, sono delle variabili, ma variabili "secondarie"
- Di solito, le variabili principali (e.g. x) vanno tra parentesi...
- ...Ed i parametri si riportano a pedice

Soluzione (Q1)

Poiché f è di 4° grado, posso scrivere:

$$f_\beta(x) = \beta_0 x^3 + \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3$$

Mentre la derivata è data da:

$$f'_\beta(x) = 3\,\beta_0 x^2 + 2\,\beta_1 x + \beta_2$$

NOTA 2: D'ora in avanti, i parametri β saranno fissi:

- Per semplicità, li possiamo omettere
- Quindi possiamo scrivere semplicemente $f(x), f'(x)$
- Quando si fa un cambio di notazione, bisogna indicarlo

Soluzione (Q2)

La lunghezza della curva è data da:

$$L = \int_{x_a}^{x_c} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Dove $\sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ corrisponde a:

- La lunghezza di un segmento infinitesimo...
- ...Orientato secondo la tangente

Soluzione (Q3)

Definisco una funzione $L(x)$ che corrisponde a:

$$L(x) = \int_{x_a}^{x} \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

La coordinata x_d del punto d è determinata risolvendo:

$$L(x) = \lambda$$

- Si può usare il metodo della bisezione o quello di Newton-Raphson
- La derivata può essere approssimata numericamente

La coordinata y_d del punto d è ora data da:

$$y_d = f(x_d)$$

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio 2 (modellazione)

Esercizio 2

Un'automobile avanza a motore spento su un rettilineo:

- L'auto ha una velocità iniziale v_0
- L'auto è soggetta alla forza di attrito aerodinamico, data da:

$$F_d = \frac{1}{2}\rho v^2 C_D A$$

  - v è la velocità dell'auto
  - ρ, A, C_D sono parametri noti
- Fintanto che avanza, l'auto è soggetta all'attrito volvente delle ruote:

$$F_r = C_r mg$$

  - C_r è un coefficiente di attrito volvente (noto)
  - m è la massa dell'automobile (nota)
  - g è l'accelerazione di gravità

Esercizio 2

Si considerino i seguenti problemi:

- **Q1:** Come varia la velocità dell'auto nel tempo?
- **Q2:** Dopo quanta strada l'auto si ferma?
- **Q3:** Che massa deve avere l'auto per arrestarsi in una distanza λ?

NOTA: La domanda Q3 è tendenzialmente la più complessa

- Non spaventatevi: ragionate più che potete
- Non è necessario fare un compito perfetto per avere 30!

Soluzione (Q1)

Innanzitutto dobbiamo capire come descrivere lo stato:

Ci interessa la velocità dell'auto, su un rettilineo:

- Possiamo descrivere la velocità con uno scalare v

Le forze che agiscono sull'auto determinano $\dot{v}$:

- Quindi possiamo descrivere il sistema con una EDO:
- In prima approssimazione potremmo scrivere:

$$\dot{v} = -\frac{1}{m}(F_d + F_r)$$

- C'è però una particolarità importante...

Soluzione (Q1)

L'attrito volvente delle ruote è attivo solo finché l'auto si muove:

- Quindi l'equazione precedente va modificata:

$$\dot{v} = -\frac{1}{m}(F_d + \hat{F}_r) \qquad \text{con: } \hat{F}_r = \begin{cases} F_r & \text{se } v > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Possiamo risolverla con un metodo numerico per $v(0) = v_0$

- Poiché usiamo un metodo numerico...
- ...La presenza di due case in $\hat{F}_r$ non è un problema!
  - Ci basta usare un "`if`"
- La soluzione è il valore di $v(t)$, per valori di t selezionabili
- La soluzione della EDO risponde a Q1

Soluzione (Q2)

Per rispondere a Q2 abbiamo bisogno della posizione dell'auto:

- Siamo su un rettilineo: quindi possiamo usare uno scalare x
- Assumiamo che la posizione iniziale sia 0
- La velocità corrisponde a $\dot{x}$

Quindi, includendo la posizione, il sistema è definito da:

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = -\frac{1}{m}(F_d + \hat{F}_r)$$

- Da risolvere per $v(0) = v_0, x(0) = 0$
- La soluzione sono i valori di $x(t), v(t)$, per valori di t selezionabili

Soluzione (Q2)

Per rispondere al quesito 2:

- Determiniamo il primo valore di t^* tale che $v(t^*) \simeq 0$
- Approssimiamo il valore di $x(t^*)$ (e.g. interpolazione lineare)
- Il valore di $x(t^*)$ risponde al quesito

Soluzione (Q3)

Per risponere a Q3, consideriamo la massa m come un parametro

- Siano $x_m(t), v_m(t)$ le soluzioni della EDO...
- ...per un dato valore di m
- Possono essere calcolate come nel caso precedente

A questo punto, per rispondere a Q3 dobbiamo risolvere:

$$x_m(t) = \lambda$$
$$v_m(t) = 0$$

- Il sistema va risolto in t e m (vanno determinate entrambe)
- In teoria si potrebbe usare il metodo di Newton-Raphson...
- ...in pratica è meglio un approccio diverso (vedere prossima slide)

Soluzione (Q3)

In pratica, per rispondere a Q2 abbiamo visto come ottenere:

- Un valore t^* tale che $v(t^*) \simeq 0$
- Ed il valore di x corrispondente a t^*

Possiamo incapsulare questo calcolo in una funzione $G(m)$

- Dato un valore di massa m…
- …$G(m)$ trova t^* e denota $x(t^*)$

A questo punto dobbiamo risolvere solo una equzione:

$$G(m) = \lambda$$

- E questo può essere fatto tranquillamente con il metodo di Newton

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio 3 (Analisi)

Esercizio 3

Si consideri lo script seguente:

```
function y = f(x)
    y(1, :) = x(2:2:end);
    y(2, :) = x(1:2:end);
end

y = f([1, 2, 3, 4])
z = y(1, :) + y(2, :)
w = sum(z)
```

- Che cosa stampa?
- Si motivi (intuitivamente) la risposta

Soluzione

```
function y = f(x)
    y(1, :) = x(2:2:end);
    y(2, :) = x(1:2:end);
end
% y(1, :) contiene i valori di x in posizione pari
% y(2, :) contiene i valori di x in posizione dispari
% quindi; y = [2, 4;
%               1, 3]
y = f([1, 2, 3, 4])
% Sommando le due righe di y abbiamo z = [3, 7]
z = y(1, :) + y(2, :)
% w contiene la somma di tutti i valori in x: w = 10
```

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio 4 (codifica)

Esercizio 4

Si codifichi la funzione:

```
function x = eulero(f, x0, t)
```

Che risolve una EDO con il metodo di Eulero.

- **`f`** è una funzione che calcola la derivata dello stato corrente:

  ```
  function  dx = f(x, t)
  ```

  - **`x`** è lo stato (uno scalare), **`t`** è l'istante di tempo corrente
- **`x0`** è il valore iniziale dello stato (uno scalare)
- **`t`** è il vettore dei tempi per cui va determinato lo stato

Si discuta brevemente il metodo

Soluzione

Il metodo di Eulero risolve una EDO in base all'iterazione fondamentale:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + (t^{(k+1)} - t^{(k)}) f(x^{(k)}, t^{(k)})$$

Una possibile codifica:

```
function x = eulero(f, x0, t)
    x(1) = x0;
    for ii = 1:length(t)-1
        dt = t(ii+1) - t(ii);
        x(ii+1) = x(ii) + dt .* f(x(ii), t(ii));
    end
end
```

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio 5 (codifica)

Esercizio 5

Si discuta brevemente il metodo di Newton-Raphson e si codifichi:

```
function x = newton_raphson(f, df, x0)
```

Ossia una funzione che esegue il metodo. I parametri sono:

- `f` è la funzione (scalare) da annullare:

```
function  y = f(x)
```

- `df` è una funzione che calcola la derivata di `f`

```
function  y = df(x)
```

- `x0` è valore di `x` da cui partire

Soluzione

Il metodo di Newton-Raphson trova lo zero di una funzione:

- Utilizzando ripetutamente una approssimazione lineare
- Da cui si deriva l'iterazione fondamentale:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

Soluzione

Una possibile codifica:

```
function x = newton_raphson(f, df, x0)
    for ii = 1:1000
        x_old = x0;
        x = x_old - f(x_old) ./ df(x_old);
        if abs(x - x_old) < 1e-5
            break
        end
    end
end
```

- Il numero massimo di iterazioni è stato posto a 1000
- La convergenza è verificata sul valore di `x`
- È stata usata una tolleranza di 10^{-5}

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio 6 (Rappresentazione dei Numeri)

Esercizio 6

Un calcolatore rappresenta i numeri in virgola mobile utilizzando:

- Una rappresentazione in base 10 (per semplicità)
- Mantisse normalizzate in modo che la parte intera sia sempre 0
- Tre cifre decimali per la mantissa
- Una cifra decimale per l'esponente

Si calcoli il risultato delle somme:

$$0.122 \times 10^{-1} + 0.430 \times 10^{-2}$$
$$0.120 \times 10^{-1} + 0.432 \times 10^{-2}$$

Si evidenzino eventuali errori di cancellazione

Soluzione

- Per sommare i numeri, gli esponenti devono essere resi identici
- Le mantisse devono rimanere normalizzate
- Quindi ci si riduce sempre all'esponente più grande

Consideriamo la prima somma:

$$0.122 \times 10^{-1} + 0.430 \times 10^{-2}$$

- Uguagliando gli esponenti si ottiene:

$$0.122 \times 10^{-1} + 0.043 \times 10^{-1} = 0.165 \times 10^{-1}$$

- Il risultato è esatto

Soluzione

- Per sommare i numeri, gli esponenti devono essere resi identici
- Le mantisse devono rimanere normalizzate
- Quindi ci si riduce sempre all'esponente più grande

Consideriamo la seconda somma:

$$0.120 \times 10^{-1} + 0.432 \times 10^{-2}$$

- Uguagliando gli esponenti si ottiene:

$$0.120 \times 10^{-1} + 0.043 \times 10^{-1} = 0.163 \times 10^{-1}$$

- Una cifra del secondo termine è stata cancellata
- Il risultato corretto sarebbe 0.1632×10^{-1}

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio 7 (Rappresentazione dei Numeri)

Esercizio 7

Un calcolatore rappresenta i numeri in virgola mobile utilizzando:

- Una rappresentazione in base 10 (per semplicità)
- Mantisse normalizzate in modo che la parte intera sia sempre 0
- Quattro cifre decimali per la mantissa
- Una cifra decimale per l'esponente

Si calcoli il risultato delle somme:

$$0.0702 \times 10^4 + 0.1001 \times 10^2$$

$$0.0702 \times 10^4 + 0.0085 \times 10^2$$

Si evidenzino eventuali errori di cancellazione

Soluzione

- Per sommare i numeri, gli esponenti devono essere resi identici
- Le mantisse devono rimanere normalizzate
- Quindi ci si riduce sempre all'esponente più grande

Consideriamo la prima somma:

$$0.0702 \times 10^4 + 0.1001 \times 10^2$$

- Uguagliando gli esponenti si ottiene:

$$0.0702 \times 10^4 + 0.0010 \times 10^4 = 0.0712 \times 10^4$$

- C'è un errore di cancellazione
- Il risultato corretto è 0.071201×10^4

Soluzione

- Per sommare i numeri, gli esponenti devono essere resi identici
- Le mantisse devono rimanere normalizzate
- Quindi ci si riduce sempre all'esponente più grande

Consideriamo la seconda somma:

$$0.0702 \times 10^4 + 0.0085 \times 10^2$$

- Uguagliando gli esponenti si ottiene:

$$0.0702 \times 10^4 + 0.0000 \times 10^4 = 0.0702 \times 10^4$$

- C'è un errore di cancellazione
- Il risultato corretto è 0.070285×10^4