Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Punto fisso di $\cos x$

Punto fisso di $\cos x$

Si calcoli il punto fisso della funzione $f(x) = \cos(\alpha x)$

Si parta dal file **`ch7_fpi1.m`**, che contiene:

- Una funzione principale che esegue una serie di operazioni

```
function x_f = ch7_fpi1(x0)
```

- La funzione principale ha lo stesso nome del file...
- ...Ed è la prima a comparire nel file

Il file contiene poi una serie di sotto-funzioni

- Queste possono avere qualunque nome...
- ...ma non sono visibili al di fuori del file

Punto fisso di $\cos x$

Nel nostro caso, tra le sotto-funzioni abbiamo:

Una funzione per visualizzare la posizione del punto fisso

```
function plot_function()
```

Una funzione per visualizzare l'andamento di $|x^{(k+1)} - x^{(k)}|$

```
function plot_distance(d_h)
```

- Dove `d_h` è un vettore con i valori (assoluti) della distanza

Una funzione per calcolare $\cos(\alpha x)$

```
function z = f(x)
```

Punto fisso di $\cos x$

Per risolvere l'esercizio, dobbiamo codificare la funzione:

```
function [x_f, d_h] = fpi(x0, n = 1000, tol = 1e-6)
```

Che restituisce:

- Uno scalare `x_f`, che indica il risultato di IPF
- Un vettore `d_h`, con il valore di $|x^{(k+1)} - x^{(k)}|$ ad ogni iterazione

La funzione ha come parametri:

- Il punto di partenza `x0`
- Il numero massimo di iterazioni `n`
- la tolleranza `tol`

Punto fisso di $\cos x$

In particolare, si codifichi la funzione:

```
function [e_h, x_f] = fpi(x0, n = 1000, tol = 1e-6)
```

Che restituisce:

- Un vettore **`e_h`**, con il valore assoluto dell'errore ad ogni iterazione
- Uno scalare **`x_f`**, che indica il risultato di IPF

Per **`n`** e **`tol`** è indicato un valore di default

- Se **`n`** o **`tol`** non sono specificati al momento della chiamata...
- ...Allora assumono il valore di default

Punto fisso di $\cos x$

Si osservi come si comporta IPF per vari valori di α

In particolare, si provi con:

- $x_0 = 0$
- $\alpha = 0.5, 1, 1.1, 1.3, 1.4, 2, 3, 3.5$

Qualche domanda interessante:

- Quali e quanti sono i punti fissi?
- IPF converge o diverge?
- Verso quale valore?

Soluzione

Una possibile soluzione:

```
function [x_f, d_h] = fpi(x0, n = 1000, tol = 1e-6)
    x_f = x0;
    d_h = [];
    for k = 1:n
        x_old = x_f;
        x_f = f(x_f);
        d_h(k) = abs(x_f - x_old);
        if d_h(k) < tol
            break
        end
    end
end
```

Soluzione

Al crescere di α:

- Per $\alpha < 3$ c'è un solo punto fisso
- Il numero di iterzioni necessarie per convergere cresce
- Per $\alpha >\sim 1.3$ IPF assume comportamento periodico
- Quando $\alpha = 3$ la funziona acquista un nuovo punto fisso…
- …ed IPF ricomincia a convergere

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Equazione Non Lineare (1)

Equazione Non Lineare (1)

Si utilizzi IPF per risolvere l'equazione non lineare:

$$\frac{1}{2}x + 1 = \frac{2}{1 + e^{-2x}}$$

Si parta dal file **`ch7_fpi2.m`**. In particolare:

- Si codifichi la funzione:

```
function [x_f, d_h] = fpi(x0, n = 1000, tol = 1e-6)
```

- A partire dal codice sviluppato all'esercizio precedente
- Portando l'equazione da risolvere nella forma:

$$x = f(x)$$

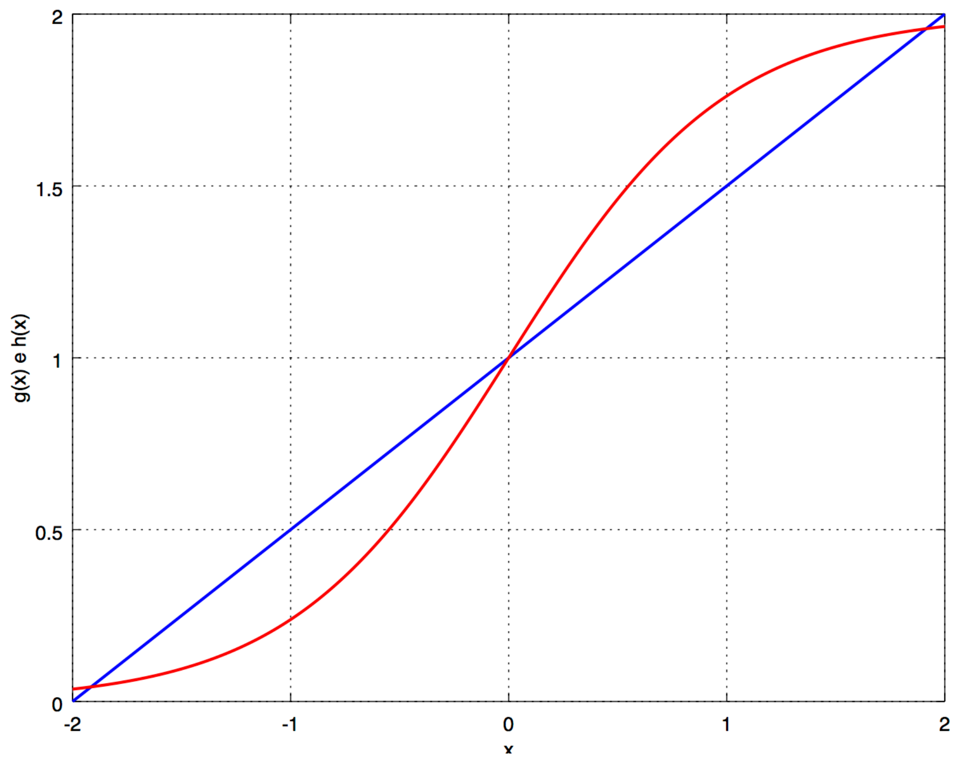
Equazione Non Lineare (1)

Si osservi il comportamento di IPF:

- Quanti punti e quali sono i punti fissi?
- A che tipo di equilibrio corrispondono?
- Si utilizzino diversi valori per il punto di partenza x_0
- Che impatto ha utilizzare diverse forme per $f(x)$?

Soluzione

L'equazione ha tre punti fissi (in $\sim -1.915, 0, \sim 1.915$)



Soluzione

Una possibile soluzione:

```
function [x_f, d_h] = fpi(x0, n = 1000, tol = 1e-6)
    x_f = x0;
    d_h = [];
    for k = 1:n
        x_old = x_f;
        x_f = f(x_f); % <-- UNICA VARIAZIONE
        d_h(k) = abs(x_f - x_old);
        if d_h(k) < tol
            break
        end
    end
end
```

Soluzione

Una prima forma possibile per $f(x)$:

$$f(x) = 2\left(\frac{2}{1+e^{-2x}} - 1\right)$$

Codice:

```
function z = f(x)
    z = 2.*(2 ./ (1 + e.^(-2.*x)) - 1);
end
```

- I punti fissi $\sim \pm 1.915$ sono stabili
- Il punto fisso 0 è instabile

Soluzione

Una seconda forma possibile per $f(x)$:

$$f(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{{}^{1}/_{2}x + 1} - 1\right)$$

Codice:

```
function z = f(x)
    z = -(1/2).*log((2 ./ (0.5 .* x + 1)) - 1);
end
```

- I punti fissi $\sim \pm 1.915$ sono instabili
- Il punto fisso 0 è stabile

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Distribuzione di Pressione in un Fluido Comprimibile Isoentropico

Pressione in Fluido Isoentropico

Dal corso di Fluidodinamica, dovreste sapere che:

- In un fluido comprimibile isoentropico all'equilibrio...
- ...La pressione si distribuisce secondo l'equazione:

$$p = p_0 \left[1 + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{M}{RT_0} g(z_0 - z) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

- Mentre la temperatura si distribuisce secondo l'equazione:

$$T = T_0 \left[1 + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{M}{RT_0} g(z_0 - z) \right]$$

Pressione in Fluido Isoentropico

Sappiamo che (senza indicare le unità di misura):

$$R = 8.31$$
$$g = 9.81$$

Supponiamo di sapere che, per $z_0 - z = -10$:

$$p0 = 1 \qquad T0 = 295$$
$$T = 257.70 \qquad p = 0.65$$

Quanto vale γ e quale è la massa M del fluido?

Pressione in Fluido Isoentropico

Il problema richiede di risolvere un sistema non-lineare

Inizialmente, abbiamo:

$$f(\gamma, M) = 0$$
$$g(\gamma, M) = 0$$

- Se riusciamo a portarlo nella forma:

$$f(\gamma, M) = 0$$
$$M = h(\gamma)$$

- Allora possiamo sostituire M in $f(x)$ ed usare IPF

Purtroppo, ci sono casi in cui questa operazione non è possibile

Pressione in Fluido Isoentropico

Esiste una alternative semplice e più generale

Se riusciamo a portare il sistema nella forma:

$$\gamma = f(\gamma, M)$$
$$M = g(\gamma, M)$$

...Possiamo ancora usare IPF!

- Nei termini usati a lezione, equivale a:

$$x = f(x)$$

- Con $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

In altre parole: ci sono due "variabili di stato"

Pressione in Fluido Isoentropico

Risolvete il sistema, partendo dal file `ch7_fpi4.m`

In particolare:

- Finite la codifica della funzione:

```
[gm, M] = f(gm_0, M_0)
```

- Scegliete un valore di partenza per γ ed M

Soluzione

Occorre ottenere una espressione per γ e M

Una possibile formulazione:

$$\gamma = \frac{1}{1 - (T - T0)\frac{R}{M}\frac{1}{g(z_0 - z)}}$$

$$M = \left(\frac{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{p0} - 1\right)\frac{\gamma}{\gamma - 1}RT_0\frac{1}{g(z0 - z)}$$

- Per γ è una buona idea partire da un valore > 1
- Per M praticamente ogni valore è buono
- La soluzione è $\gamma = 1.4573$, $M = 10.069$

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Equazione Non Lineare (2)

Equazione Non Lineare (2)

Si utilizzi IPF per risolvere l'equazione non lineare:

$$\sqrt{x} = x^2 - x + \frac{1}{2}$$

Si parta dal file **`ch7_fpi4.m`**. In particolare:

- Si codifichi la funzione:

```
function z = f(x)
```

- Utilizzata dalla funzione **`fpi(x0, n, tol)`**...
- ...Nella relazione:

$$x = f(x)$$

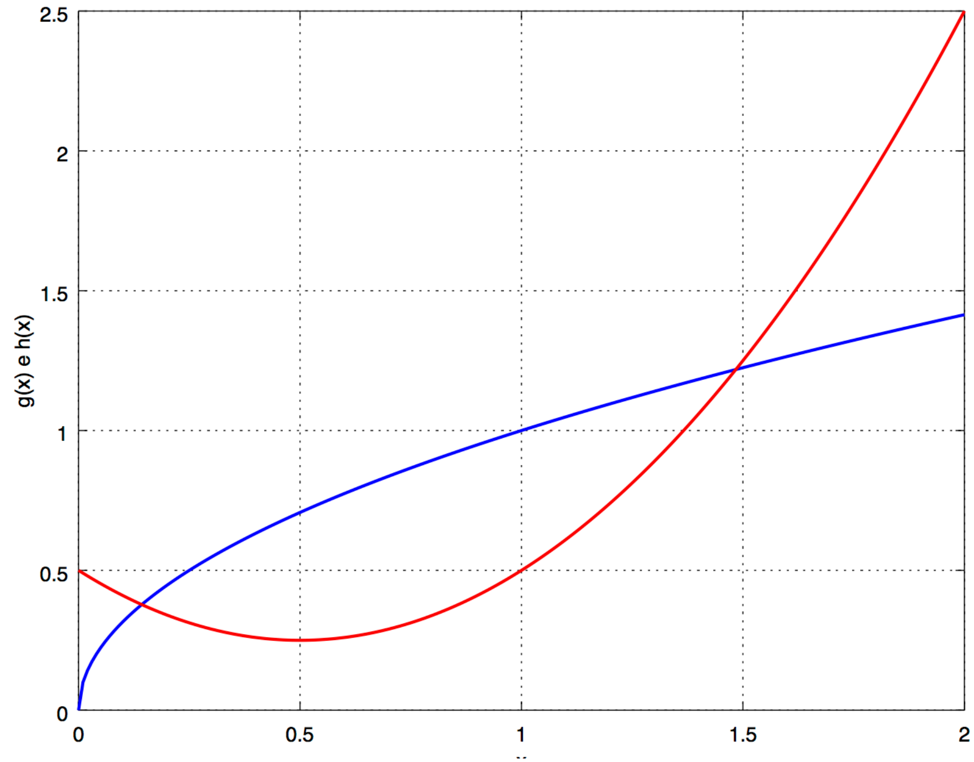
Equazione Non Lineare (2)

Si osservi il comportamento di IPF:

- Quanti punti e quali sono i punti fissi?
- A che tipo di equilibrio corrispondono?
- Si utilizzino diversi valori per il punto di partenza x_0
- Che impatto ha utilizzare diverse forme per $f(x)$?

Soluzione

L'equazione ha due punti fissi (in $\sim 0.14265, \sim 1.484$)



Soluzione

Una prima forma possibile per $f(x)$:

$$f(x) = x^2 - \sqrt{x} + 0.5$$

Codice:

```
function z = f(x)
    z = x.^2 - sqrt(x) + 0.5;
end
```

- Questa forma non converge mai
- È periodica per $x_0 <\sim 1.484$
- Diverge per $x_0 >\sim 1.484$

Soluzione

Una seconda forma possibile per $f(x)$:

$$f(x) = \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)^2$$

Codice:

```
function z = f(x)
     z = (x.^2 - x + 0.5).^2
end
```

- Converge a ~ 0.14265 per $x_0 <\sim 1.484$
- Diverge per $x_0 >\sim 1.484$

Soluzione

Una terza forma possibile per $f(x)$:

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x} + x - \frac{1}{2}}$$

Codice:

```
function z = f(x)
    z = sqrt(sqrt(x) + x - 0.5);
end
```

- Converge a ~ 1.484 per qualunque x_0

Osservazione utile:

- Conviene fare in modo che $|f'(x)|$ sia più piccolo possibile