Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Progettazione di Algoritmi:
Approccio Top-Down e Bottom Up

Progettare Algoritmi

Ci sono due approcci fondamentali per progettare algoritmi

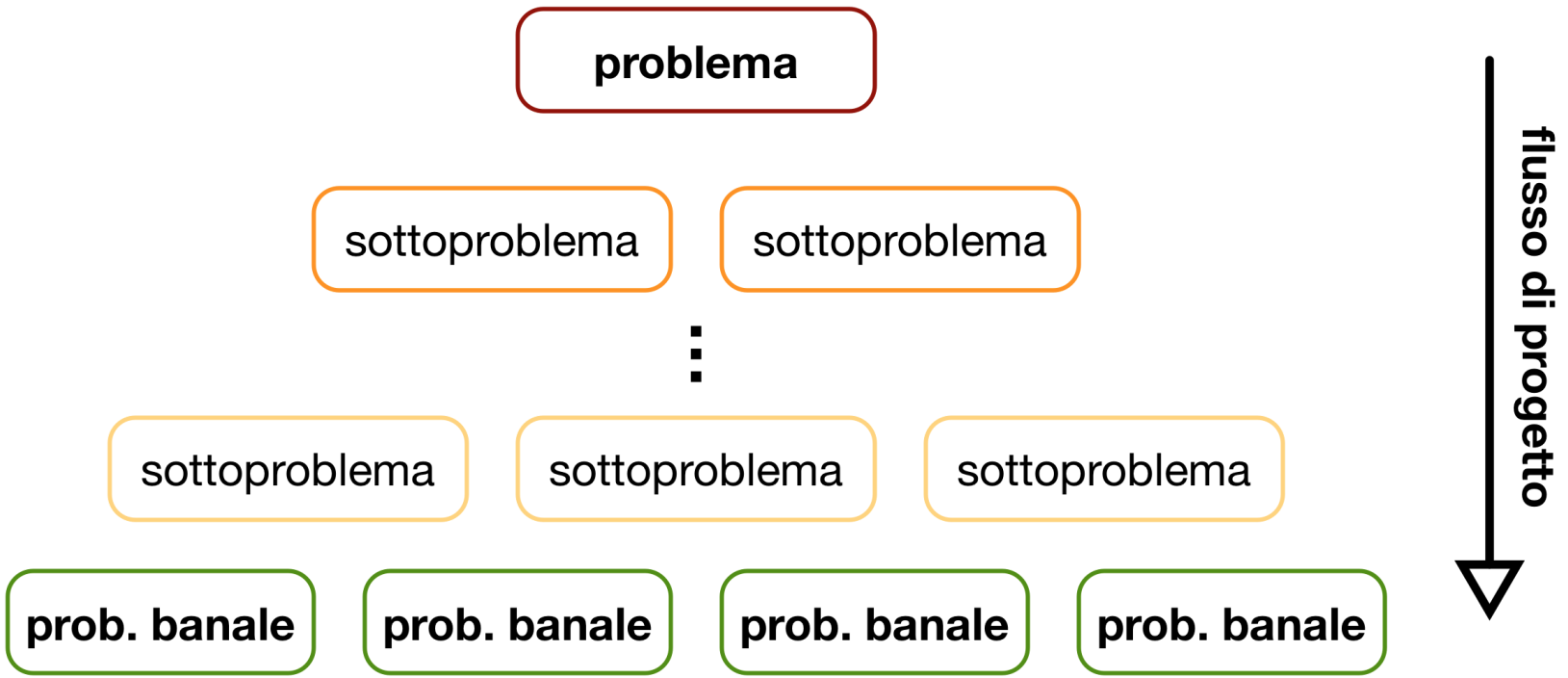
Servono ambedue ad aiutarci ad affrontare il problema

- Si chiamano "top-down" e "bottom-up"
- Sono logicamente opposti...
- ...ma in pratica si usano sempre in modo combinato

Nelle prossime slide:

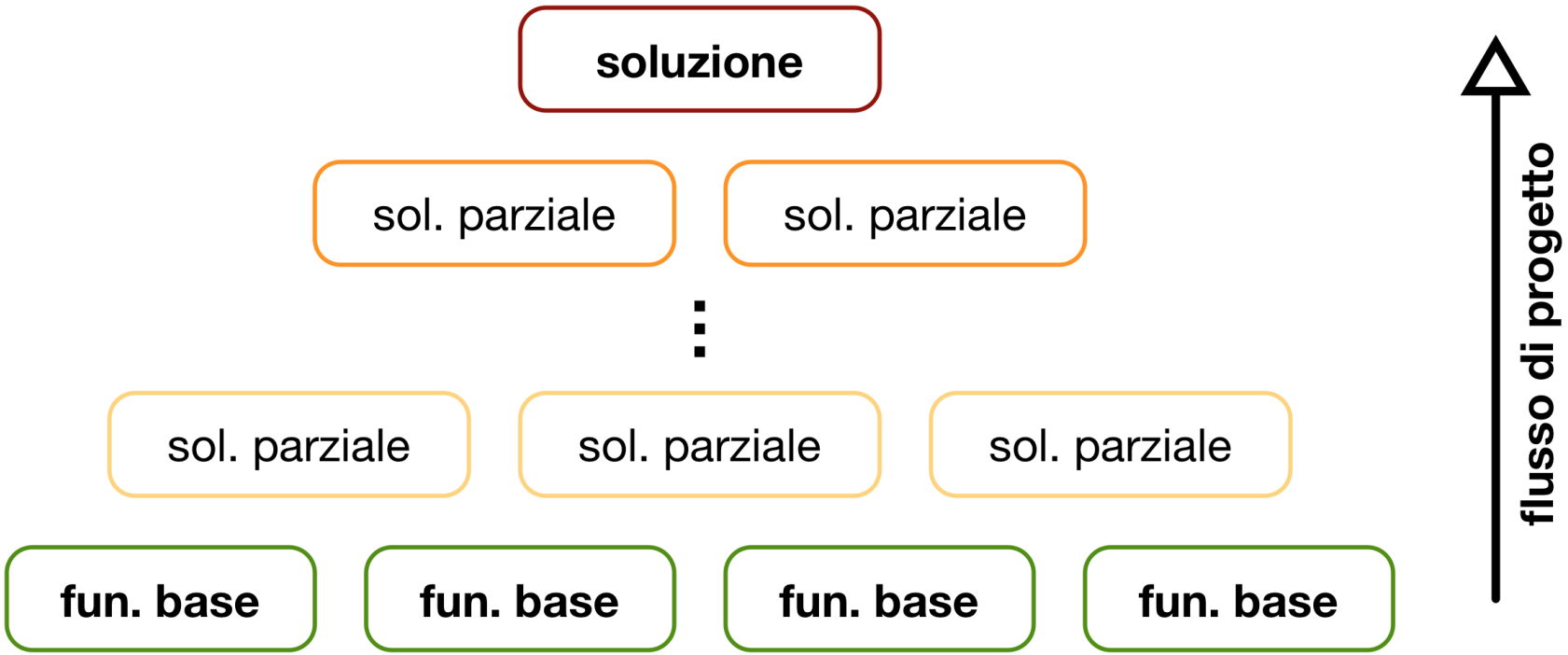
- Li definiremo in modo concettuale
- Poi mostreremo un esempio

Approccio Top-Down



- Si parte dal problema iniziale
- Lo si decompone in sottoproblemi
- Finché questi non diventano banali da risolvere

Approccio Bottom-Up



- Si parte dalla funzioni disponibili
- Le si usano per risolvere problemi semplici
- Fino a risolvere il problema iniziale

Un Esempio: Confronto Di Parole

Problema: confrontare due stringhe della stessa lunghezza

Obiettivo: definire una funzione "`strcmp`":

```
strcmp('cane', 'casa')
```

Risultato:

- `< 0` se la prima parola precede la seconda
- `0` se sono uguali
- `> 0` se la seconda parola precede la prima

Un Esempio: Confronto Di Parole

Approccio (tendenzialmente) top-down:

Partiamo dal problema:

```
function z = strcmp(p1, p2)
  z = <confronto>;
end
```

Un Esempio: Confronto Di Parole

Approccio (tendenzialmente) top-down:

Per confrontare le parole dobbiamo confrontare le lettere:

```
function z = strcmp(p1, p2)
  z = 0; % assumo che siano uguali
  for ii = 1:length(p1)
    <confronto le lettere in posizione ii>
  end
end
```

Un Esempio: Confronto Di Parole

Approccio (tendenzialmente) top-down:

Le lettere possono essere confrontate direttamente:

```
function z = strcmp(p1, p2)
  z = 0;
  for ii = 1:length(p1)
    if p1(ii) < p2(ii)
      <gestisci il risultato>
    end
    if p1(ii) > p2(ii)
      <gestisci il risultato>
    end
  end
end
```

Un Esempio: Confronto Di Parole

Approccio (tendenzialmente) top-down:

A questo punto calcolare il risultato è banale:

```
function z = strcmp(p1, p2)
  z = 0;
  for ii = 1:length(p1)
    if p1(ii) < p2(ii)
      z = -1
      break % interrompo la computazione!
    end
    if p1(ii) > p2(ii)
      z = 1
      break % interrompo la computazione!
    end
  end
```

Un Esempio: Confronto Di Parole

Approccio (tendenzialmente) bottom-up:

Le stringhe sono vettori di numeri: possiamo confrontarle

```
function z = strcmp(p1, p2)
  s1 = p1 < p2
  s2 = p1 > p2
end
```

Se provo ad invocare la funzione ottengo:

```
strcmp('cane', 'casa') % stampa [0, 0, 1, 0]
                       % stampa [0, 0, 0, 1]
```

Il risultato dipende da dove (`s1` ed `s2`) si trova l'`1` più a sinistra

Un Esempio: Confronto Di Parole

Funzione `find`

Octave offre la funzione:

```
find(V) % denota gli indici dei valori ~= 0 in V
find(V, N) % denota i primi N indici di cui sopra
```

Input:

- Un vettore, oppure un vettore ed un intero

Output:

- Un vettore con gli indici degli elementi non nulli
- Solo i primi N indici, se viene passato un intero

Un Esempio: Confronto Di Parole

Approccio (tendenzialmente) bottom-up:

Posso usare `find` per trovare la posizione degli `1`

```
function z = strcmp(p1, p2)
  s1 = p1 < p2;
  s2 = p1 > p2;
  n1 = find(s1, 1)
  n2 = find(s2, 1)
end
```

Se provo ad invocare la funzione ottengo:

```
strcmp('cane', 'casa') % stampa 3
                       % stampa 4
```

Un Esempio: Confronto Di Parole

Approccio (tendenzialmente) bottom-up:

La differenza tra `n1` ed `n2` fornisce il risultato

```
function z = strcmp(p1, p2)
  s1 = p1 < p2;
  s2 = p1 > p2;
  n1 = find(s1, 1);
  n2 = find(s2, 1);
  z = n1 - n2
end
```

Se provo ad invocare la funzione ottengo:

```
strcmp('cane', 'casa') % denota -1 (< 0)
```

Un Esempio: Confronto Di Parole

Approccio (tendenzialmente) bottom-up:

Aggiungiamo una piccola modifica per gestire stringhe identiche:

```
function z = strcmp(p1, p2)
  s1 = p1 < p2;
  s2 = p1 > p2;
  n1 = find(s1, 1);
  n2 = find(s2, 1);
  if length(n1) == 0
    z = 0
  else
    z = n1 - n2
  end
end
```

Top-Down vs Bottom-Up

Il metodo top-down

- Aiuta ad affrontare il problema in modo ordinato (PRO)
- Facilita la verifica di correttezza del programma (PRO)
- Può rendere difficile esaminare i risultati parziali (CON)

Il metodo bottom-up

- È un po' disordinato e non facilita la verifica di correttezza (CON)
- Può essere più veloce, sia da scrivere che da eseguire (PRO)
- Permette facilmente di esaminare i risultati parziali (PRO)

Di fatto, si usano sempre insieme

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Costruzione Rapida di Vettori e Matrici

Costruzione Rapida di Vettori e Matrici

Vediamo alcune funzioni per costruire vettori/matrici

Per ottenere una matrice `M x N` di zeri:

```
zeros(M, N)
```

Restituisce una matrice `M x N` di `1`:

```
ones(M, N)
```

Per ottenre una matrice `M x N` di numeri casuali in `(0, 1)`

```
rand(M, N)
```

- Ricorda che un vettore per Octave è una matrice

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Prodotto di un Vettore (F)

Esercizio: Prodotto di un Vettore

Octave fornisce una funzione per calcolare il prodotto di un vettore:

```
prod(X)
```

Definite una nuova funzione:

```
XXX_prod(V) % XXX è un qualunque prefisso
```

- Che calcoli il prodotto di un vettore **`v`**, passato come argomento

Qualche dritta:

- La funzione deve essere in un file di nome **`XXX_prod.m`**
- Usate **`rand`** per ottenere vettori casuali e fare test
- Confrontate i risultati con quelli di **`prod`**

Soluzione

Una possibile soluzione:

```
function yy = ch3_prod(xx)
  yy = 1;
  for v = xx
    yy = yy .* v;
  end
end
```

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Distanza Euclidea (F)

Esercizio: Distanza Euclidea

Octave fornisce una funzione per calcolare la norma di un vettore:

```
norm(X, P) % usate help per i dettagli
```

- `X` è il vettore
- `P` è l'ordine della norma

Per `P = 2`, la funzione calcola la distanza euclidea dall'origine:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

Esercizio: Distanza Euclidea

Definite una nuova funzione:

```
XXX_norm(X) % XXX è un qualunque prefisso
```

- Che calcoli la norma di ordine due del vettore **`X`**

Qualche dritta:

- La funzione deve essere in un file di nome **`ch3_prod.m`**
- Usate **`rand`** per ottenere vettori casuali e fare test
- La radice quadrata si può calcolare con:
  - La funzione **`sqrt`**
  - L'elevamento a potenza **`.^0.5`**

Soluzione

Una possibile soluzione:

```
function yy = ch3_norm(xx)
  yy = 0;
  for vv = xx
    yy = yy + vv.^2;
  end
  yy = sqrt(yy);
end
```

Un'altra possibile soluzione:

```
function yy = ch3_norm(xx)
  xx2 = xx.^2;
  yy = sqrt(sum(xx2));
end
```

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Argmax (F)

Esercizio: Argmax

Octave permette di trovare il massimo elemento di un vettore con:

```
max(X)
```

- La funzione può restituire anche due risultati

Se invocata con due elementi a sinistra dell'operatore "=":

```
[V, I] = max(X)
```

La funzione restituisce:

- Il massimo elemento in `V`
- Il primo indice a cui può essere trovato in `I`

Così, svolge anche il ruolo della funzione matematica **argmax**

Esercizio: Indice del Massimo Elemento

Definite una nuova funzione:

```
[V, I] = XXX_max(X) % XXX è un qualunque prefisso
```

Che replica il comportamento di **`max`** in Octave, restituendo:

- In **`V`** il massimo elemento del vettore **`X`**
- In **`I`** l'indice della sua prima occorrenza

Per definire una funzione che restituisce più argomenti la sintassi è:

```
function [<r1>, <r2>, ...] = <nome>(<p1>, <p2>, ...)
    ...
end
```

Soluzione

Una possibile soluzione:

```
function [yy, ii] = ch3_max(xx)
  ii = 1;
  yy = xx(1);
  for jj = 2:length(xx)
    if xx(jj) > yy
      yy = xx(jj);
      ii = jj;
    end
  end
end
```

Una possibile invocazione:

```
[y1, i1] = ch3_max([1, 7, 3, 2, 5, 10, 9, 7, 10])
```

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Prodotto Scalare (F)

Esercizio: Prodotto Scalare

Octave permette di effettuare il prodotto scalare con:

```
X * Y' % HP: vettori riga
dot(X, Y) % funzione dedicata
```

- `X` e `Y` sono due vettori della stessa lunghezza

Definite una nuova funzione:

```
XXX_dot(X, Y) % scegliete il prefisso XXX
```

Che replichi la stessa funzionalità

- Usare sempre i comandi di Octave per controllare se funziona

Soluzione

Una possibile soluzione:

```
function zz = ch3_dot(xx, yy)
  zz = 0;
  for ii = 1:length(xx)
    zz = zz + xx(ii) .* yy(ii);
  end
end
```

Oppure:

```
function zz = ch3_dot(xx, yy)
  zz = sum(xx .* yy);
end
```

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Elementi Non Nulli (M)

Esercizio: Elementi Non Nulli

Octave fornisce la funzione:

```
find(X)
```

- che restituisce gli indici degli elementi diversi da `0`

Definite una nuova funzione:

```
XXX_find(X) % scegliete il prefisso XXX
```

Che replichi tale funzionalità.

- Usare sempre i comandi di Octave per controllare se funziona

Soluzione

Una possibile soluzione:

```
function yy = ch3_find(xx)
  yy = [];
  k = 1;
  for ii = 1:length(xx)
    if xx(ii) ~= 0
      yy(k) = ii;
      k = k + 1;
    end
  end
end
```

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Matrice Diagonale (F/D)

Esercizio: Matrice Diagonale

Octave permette di costruire una matrice diagonale con:

```
diag(X)
```

- Restituisce una matrice diagonale
- Gli elementi sulla diagonale sono quelli del vettore **X**

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

Esercizio: Matrice Diagonale

Definite una nuova funzione:

```
XXX_diag(X) % XXX è un qualunque prefisso
```

Che replichi il comportamento di **`diag`** in Octave

Qualche dritta:

- Ridate un'occhiata alla lista di funzioni per costruire vettori/matrici
- Usate la funzione di Octave per controllare la correttezza

Soluzione

Una possibile soluzione:

```
function yy = ch3_diag(xx)
  nn = length(xx);
  yy = zeros(nn);
  for ii = 1:nn
    yy(ii,ii) = xx(ii);
  end
end
```

Soluzione

Un'altra possibile soluzione:

```
function yy = ch3_diag(xx)
  nn = length(xx);
  yy = zeros(nn);
  ii = (0:nn-1) .* nn + (1:nn); % idx sulla diagonale
  yy(ii) = xx; % indicizzazione via vettore unico
end
```

- Data una matrice con n elementi per colonna
- Dati due indici i e j per le righe e le colonne
- L'indice unico è dato da $(j-1)*n+i$
- Quindi gli indici sulla diagonale hanno forma: $(i-1)*n+i$

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Indicizzazione mediante Vettore (F/M)

Esercizio: Indicizzazione mediante Vettore

Abbiamo visto che Octave permette di accedere ad un vettore con:

```
V(I)
```

- `V` è un vettore
- `I` è un vettore di indici

Definite una nuova funzione:

```
XXX_index(V, I)
```

Che replica la stessa funzionalità

- Usare sempre i comandi di Octave per controllare se funziona

Soluzione

Una possibile soluzione:

```
function yy = ch3_index(xx, ii)
  nn = length(ii);
  yy = zeros(1, nn);
  for jj = 1:nn
    kk = ii(jj); % Ottengo l'indice in xx
    yy(jj) = xx(kk); % Assegno il valore
  end
end
```

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Indicizzazione
con Valori Logici (M/D)

Esercizio: Indicizzazione con Valori Logici

Abbiamo visto che Octave permette di accedere ad un vettore con:

```
V(I)
```

- `V` è un vettore
- `I` è un vettore di valori logici

Definite una nuova funzione:

```
XXX_index2(V, I)
```

Che replica la stessa funzionalità

- Usare sempre i comandi di Octave per controllare se funziona

Soluzione

Una possibile soluzione:

```
function yy = ch3_index2(xx, cc)
  yy = [];
  kk = 1; % Indice corrente sul vettore risultato
  for jj = 1:length(xx)
    if cc(jj) ~= 0
      yy(kk) = xx(jj); % Assegno un elemento
      kk = kk + 1; % Incremento l'indice
    end
  end
end
```

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Elementi Distinti (D)

Esercizio: Elementi Distinti

Octave fornisce la funzione:

```
unique(X)
```

- `X` che restituisce gli elementi distinti del vettore `X`

Definite una nuova funzione:

```
XXX_unique(X, Y) % scegliete il prefisso XXX
```

Che replichi la stessa funzionalità

- Octave ordina anche l'array di uscita: noi non lo faremo
- Usare sempre i comandi di Octave per controllare se funziona

Soluzione

Una possibile soluzione:

```
function yy = ch3_unique(xx)
  yy = []; % Uso vettore vuoto
  ii = 1; % Indice corrente sul vettore risultato
  for vv = xx
    % Controllo se l'elemento non sia già presente
    if ~any(yy == vv)
      yy(ii) = vv; % Inserisco l'elemento
      ii = ii + 1; % Incremento l'indice
    end
  end
end
```

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Identificazione
di Numeri Primi (D)

Esercizio: Identificazione di Numeri Primi

Octave fornisce la funzione:

```
isprime(N)
```

- che individua se il numero `N` è primo

Definite una nuova funzione:

```
XXX_isprime(N) % scegliete il prefisso XXX
```

Che replichi tale funzionalità

- Un numero è primo se è divisibile sono per `1` e per se stesso
- Si intende: divisibile secondo la divisione intera

Esercizio: Identificazione di Numeri Primi

Octave permette di calcolare la divisione intera con:

```
idivide(x, y)
```

E il resto della divisione intera con:

```
mod(x, y)
```

Esempio:

```
idivide(5, 2) % denota 2
mod(5, 2) % denota 1
```

`x` è divisibile per `y` sse il resto è `0`

Soluzione

Una possibile soluzione:

```
function yy = ch3_isprime(vv)
  yy = true; % assumo che il numero sia primo
  for ww = 2:sqrt(vv) % Cerco un divisore
    if mod(vv, ww) == 0 % verifico il resto
      yy = false % il numero non è primo
      break % posso terminare
    end
  end
end
```

Possiamo smettere di cercare divisori quando arriviamo a $\sqrt{v}$

- Se v è divisibile per un numero $> \sqrt{v}$...
- ...Allora è anche divisibile per un numero $\leq \sqrt{v}$