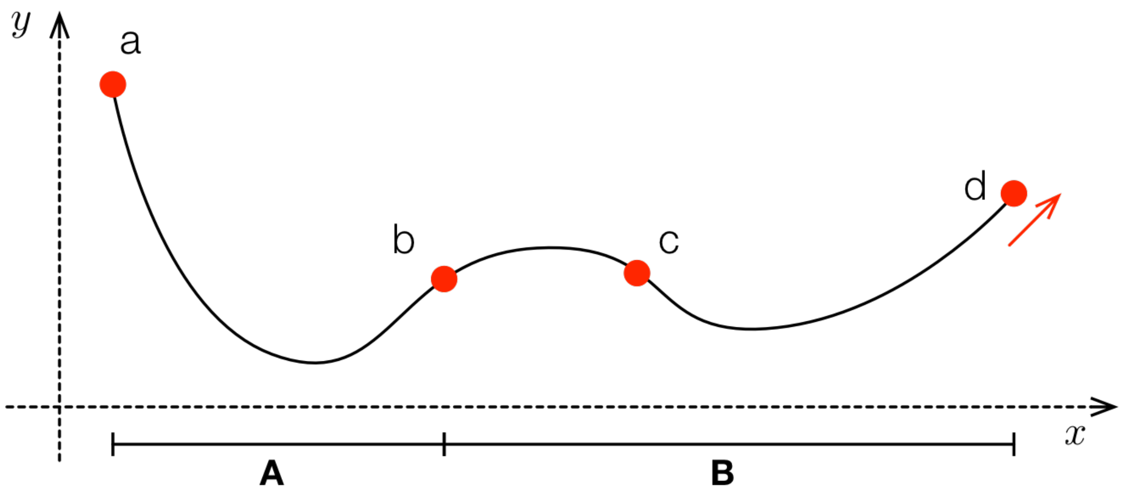
Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio 1 (modellazione)

Esercizio 1

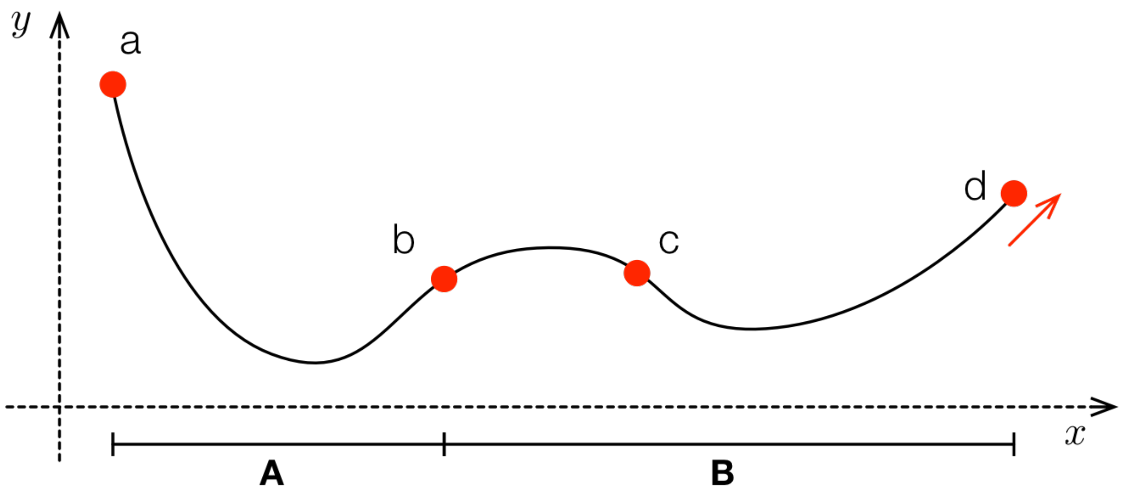
Si progetti una pista da moto-cross con la forma data:



- Il tratto è descritto da due curve polinomiali, **A** e **B**
- La curva **A** deve passare per i punti a, b
- La curva **B** deve passare per i punti b, c, d

Esercizio 1

Si progetti una pista da moto-cross con la forma data:



- I punti a, b, c, d hanno coordinate x, y note
- La pendenza in d deve essere di 45°
- La pendenza <u>non deve avere discontinuità</u> in b

Esercizio 1

Si considerino i seguenti problemi:

- **Q1:** Come si possono ottenere le due equazioni del circuito?
- **Q2:** Come si può calcolare l'area sotto la curva?
  - Essa potrebbe rappresentare (e.g.) la quanità di materiale…
  - …Necessaria per costruire la pista
  - Si assuma che tutta la curva sia al di sopra dell'asse delle x
- **Q3:** Come calcolare la quota minima raggiunta?

NOTA: questo esercizio è mediamente facile…

Soluzione (Q1)

- Si tratta di definire i parametri di due curve polnomiali $f_\beta(x), g_\beta(x)$
- Le due curve devono soddisfare le equazioni:

$$f_\beta(x_a) = y_a \qquad f_\beta(x_b) = y_b \qquad f'_\beta(x_b) = g'_\beta(x_b)$$

$$g_\beta(x_b) = y_b \qquad g_\beta(x_c) = y_c \qquad g_\beta(x_d) = y_d \qquad g'_\beta(x_d) = 1$$

È un sistema con 7 equazioni, quindi ci vogliono 7 coefficienti

- $g_\beta(x)$ è coinvolta singolarmente in 4 equazioni, quindi $n_g = 3$
- Di conseguenza abbiamo $n_f = 2$

NOTA: una equazione coinvolge sia $f_\beta(x)$ che $g_\beta(x)$

- Per questa ragione, ho un sistema unico anziché due sistemi

Soluzione (Q1)

Le due funzioni $f_\beta(x), g_\beta(x)$ sono date da:

$$f_\beta(x) = \beta_1 x^2 + \beta_2 x^1 + \beta_3$$
$$f_\beta'(x) = 2\beta_1 x + \beta_2$$
$$g_\beta(x) = \beta_4 x^3 + \beta_5 x^2 + \beta_6 x + \beta_7$$
$$g_\beta'(x) = 3\beta_4 x^2 + 2\beta_5 x + \beta_6$$

- I parametri si possono trovare risolvendo il sistema precedente
- Il sistema è lineare in β: si può utilizzare (e.g.) la riduzione di Gauss
- In Octave, possiamo utilizzare la divisione sinistra

NOTA: di seguito, i parametri β verranno omessi nella notazione

Soluzione (Q2)

Per rispondere al quesito due è sufficiente integrare le due funzioni:

- Siano Q_A e Q_B le aree sotto le curve **A** e **B**

$$Q_A = \int_{x_a}^{x_b} f(x)\, dx$$

$$Q_B = \int_{x_b}^{x_d} g(x)\, dx$$

- L'area totale è data quindi da $Q = Q_A + Q_B$

Soluzione (Q3)

Per rispondere a Q3, vanno confrontati i minimi delle due curve

La prima curva ha un unico punto stazionario:

- Esso rappresenta un minimo
- Lo si può individuare risolvendo:

$$f'(x) = 2\beta_1 x + \beta_2 = 0$$

- L'equazione si può risolvere anche per via analitica
- La soluzione è data da $x_A^* = -\frac{1}{2}\frac{\beta_2}{\beta_1}$

Soluzione (Q3)

La seconda curva ha due punti stazionari

- Si possono individuare risolvendo:

$$g'(x) = 3\beta_4 x^2 + 2\beta_5 x + \beta_6 = 0$$

Si può risolvere per via analitica o numerica

- Per esempio, possiamo usare il metodo della bisezione
- La forma della curva è approssimativamente nota...
- ...E possiamo notare che c'è un minimo tra x_c e x_d
- Quindi possiamo usare x_c, x_d come estremi iniziali per il metodo

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio 2 (modellazione)

Esercizio 2

La forza di attrito aerodinamico è data da:

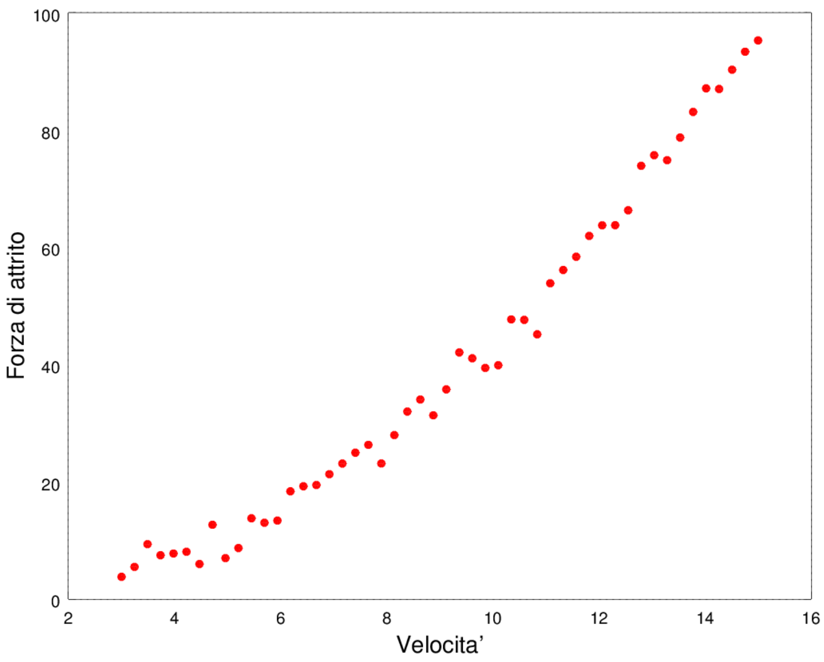
$$F = \frac{1}{2}\rho v^2 C_D A$$

Dove:

- ρ è la densità del fluido in cui ci si muove
- v è la velocità
- C_D è un coefficiente di attrito
- A è l'area frontale

Esercizio 2

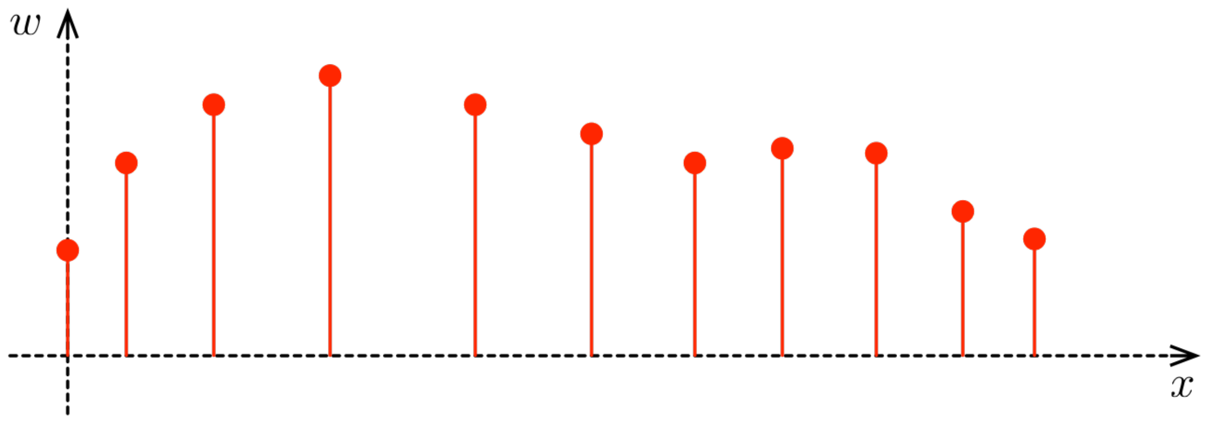
Sono stati fatti n esperimenti su un ciclista professionista:



- Per vari valori di velocità v_i è stata misurata la forza di attrito F_i

Esercizio 2

Durante una gara, sono state fatte m misurazioni ad intervalli di $5\ s$



- Ogni misurazione comprende il valore della velocità w_k …
- …E la strada percorsa x_k

NOTA: quando la velocità è alta, ovviamente si fa più strada

Esercizio 2

Si considerino i seguenti problemi:

- **Q1:** Come stimare il valore del prodotto $C_D A$ per il ciclista?
  - Si assuma che la densità dell'aria ρ sia nota
- **Q2:** Come calcolare il lavoro (fisico) svolto dal ciclista in gara?
  - Si ricordi che il lavoro è data dal <u>prodotto forza-spostamento</u>...
  - E che per avanzare bisogna <u>bilanciare la forza di attrito</u>
- **Q3:** Se si potesse ridurre del 10% il prodotto $C_D A$ ...
  - Come varierebbe il lavoro svolto dal ciclista in gara?
  - Ipotesi: la forza del ciclista rimane invariata
  - Ipotesi: la velocità è costante tra le misurazioni, $\Delta x = w_k \Delta t$

NOTA: questo esercizio è un po' particolare e non facile

Soluzione (Q1)

Per rispondere a **Q1** possiamo usare il metodo dei minimi quadrati

- Chiamiamo α il prodotto $C_D A$. La funzione approssimante è:

$$f_\alpha(v) = \frac{1}{2}\rho v^2 \alpha$$

- Quindi, per risolvere il problema definiamo una matrice Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\rho v_1^2 \\ \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Quindi troviamo α risolvendo $\Phi^T \Phi \alpha = \Phi^T F$

Soluzione (Q2)

Per rispondere a Q2, dobbiamo:

- Associare ad ogni misurazione un valore di forza
- Sommare il lavoro svolto tra ogni coppia di misurazioni

La forza necessaria per avanzare deve bilanciare quella di attrito

- Quindi ad ogni misurazione di gara k associamo una forza:

$$F_k = \frac{1}{2}\rho w_k^2 \alpha$$

- Dove α è valore determinato per Q1
- La notazione è stessa della forza di attrito (le due sono uguali)

Soluzione (Q2)

- Otteniamo così un vettore di valori di forza F...
- Associato al vettore di posizioni misurate x

Il lavoro è così data dall'integrale della forza sullo spostamento

- Possiamo calcolarlo a partire dai vettori F e x...
- ...Utilizzando il metodo dei trapezi
- Formalmente, abbiamo:

$$E = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)(F_{k+1} + F_k)$$

Soluzione (Q3)

Per rispondere a Q3, occorre simulare gli effetti della modifica di α

- Le forze del ciclista sono le stesse (i valori F_k di Q2)
- Vanno però aggiornati i valori di velocità
- Possiamo ottenere i nuovi valori (siano essi w'_k) risolvendo:

$$F_k = \frac{1}{2}\rho {w'_k}^2 \frac{9}{10}\alpha$$

- E quindi:

$$w'_k = \sqrt{2\frac{1}{\rho}\frac{10}{9}\alpha F_k}$$

Soluzione (Q3)

Con l'ipotesi di velocità costante, possiamo ricalcolare gli spostamenti

- Durante ogni intervallo k (lungo 5 secondi)...
- ...Lo spostamento è dato da:

$$\Delta x = (x_{k+1} - x_k) = w'_k \Delta t = 5 w'_k$$

- Quindi sostituendo nella formula del metodo dei trapezi:

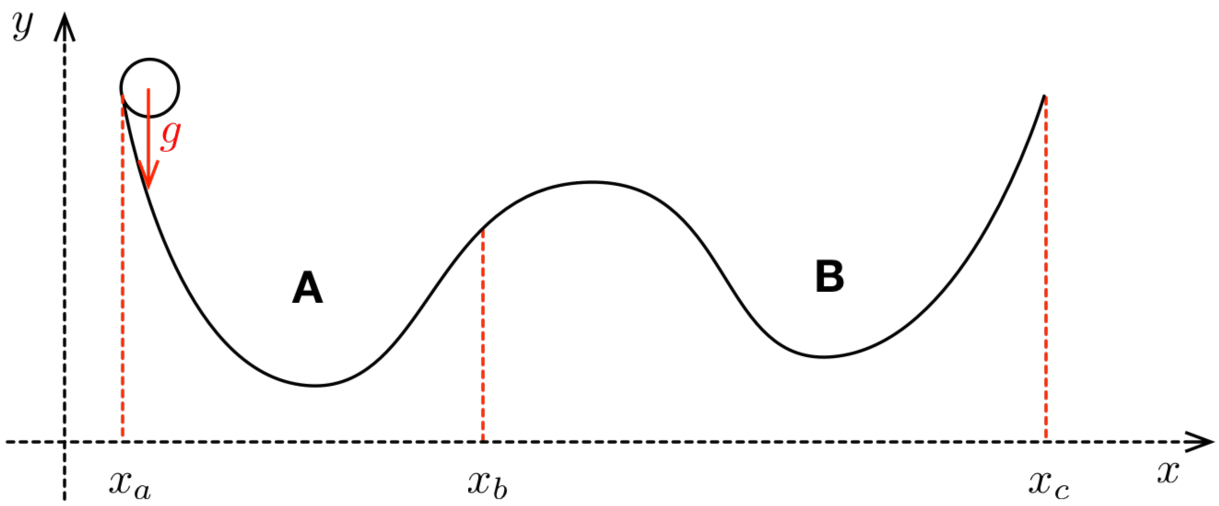
$$E' = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2} 5 w'_k (F_{k+1} + F_k)$$

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio 3 (Modellazione)

Esercizio 3

Un palla di gomma è posta su un percorso con salite e discese

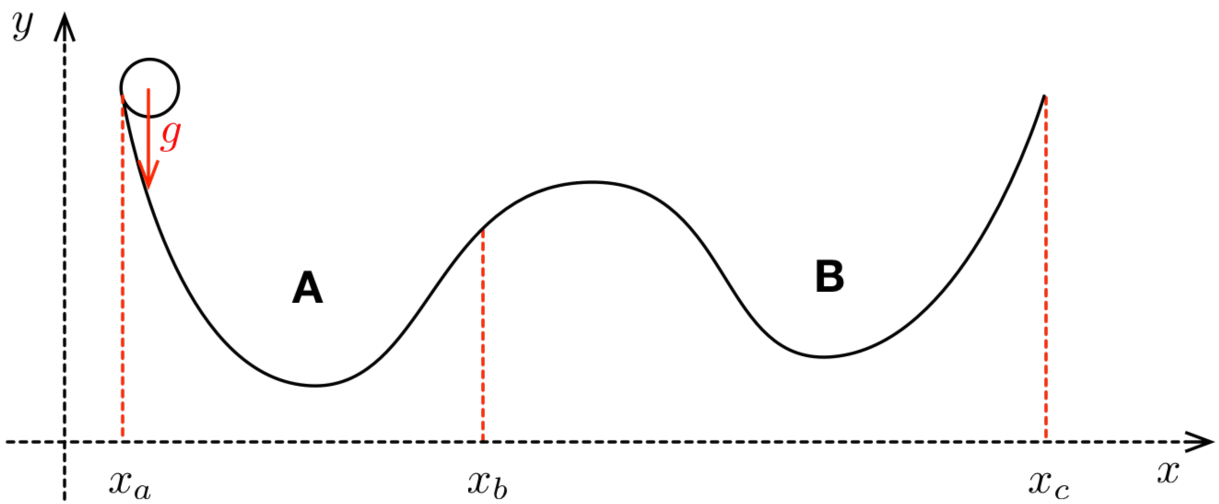


- Il tratto si compone di due curve polinomiali note A e B:

$$\phi_A(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 \qquad \phi_B(x) = \beta_1 x^3 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x + \beta_4$$

Esercizio 3

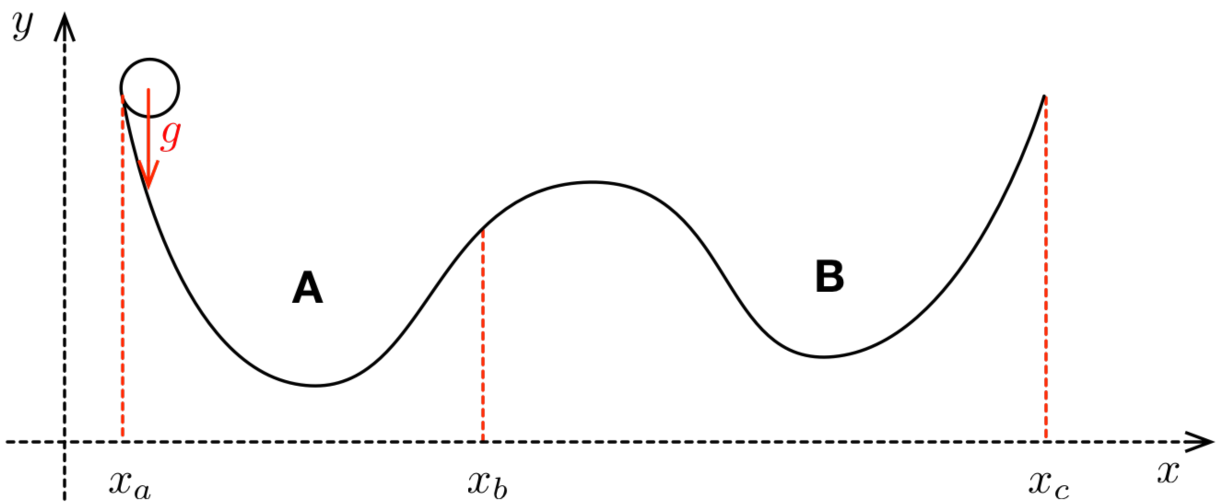
Un palla di gomma è posta su un percorso con salite e discese



- La curva A va dal punto x_a al punto x_b
- La curva B va dal punto x_b al punto x_c

Esercizio 3

Un palla di gomma è posta su un percorso con salite e discese



- La palla è originariamente nel punto x_a
- La palla è soggetta alla forza di gravità
- La palla ha massa M nota

Esercizio 3

Si considerino i seguenti problemi:

- **Q1:** Assumendo che la palla non sia soggetta ad altre forze…
  - …Come determinare l'andamento della posizione delle palla?
  - NOTA: si richiedono ambedue le coordinate della posizione
- **Q2:** Assumendo che la palla, finché è in moto, sia soggetta…
  - …Ad un attrito costante F_r nella direzione della tangente…
  - …Dove si ferma la palla?
- **Q3:** Come determinare quanta strada fa la palla prima di fermarsi?

NOTE:

- Il fatto che l'attrito sia tangenziale è una facilitazione
- Questo esercizio e difficile

Soluzione (Q1)

Le equazioni delle due curve sono note, quindi;

- Se la coordinata x della posizione della palla è nota...
- ...La coordinata y si può calcolare facilmente:

$$y = \phi(x) = \begin{cases} \phi_A(x) & \text{se } x \leq x_b \\ \phi_B(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi ci basta determinare l'andamento di x

- La passa costituisce un sistema dinamico
- Quindi possiamo determinare l'andamento della posizione...
- ...Risolvendo un sistema di equazioni differenziali

Soluzione (Q1)

- Descriviamo lo stato con la posizione x e la velocità tangenziale v
- Il sistema di EDO che ne consegue è dato da:

$$\dot{x} = v \frac{1}{\sqrt{1 + \phi'(x)^2}}$$

$$\dot{v} = -g \frac{\phi'(x)}{\sqrt{1 + \phi'(x)^2}}$$

$$\text{con: } \phi'(x) = \begin{cases} \phi'_A(x) & \text{se } x \leq x_b \\ \phi'_B(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $\dot{x}$ è dato dalla proiezione sull'asse x della velocità tangenziale
- $\dot{v}$ è dato dalla proiezione sulla tangente di g

Soluzione (Q1)

Di fatto, si tratta della EDO che abbiamo visto diverse volte a lezione

- l'unica differenza è che il calcolo delle proiezioni…
- …è diverso per le due curve A e B

Può essere risolta per esempio con il metodo di Eulero

- Dato un vettore t di istanti di tempo t_k …
- …La soluzione delle EDO sono i vettori $x(t_k)$ e $v(t_k)$

Il vettore $x(t_k)$ risponde a Q1

Soluzione (Q2)

Per rispondere a Q2 dobbiamo incorporare F_r nella EDO:

$$\dot{x} = v \frac{1}{\sqrt{1 + \phi'(x)^2}}$$

$$\dot{v} = -g \frac{\phi'(x)}{\sqrt{1 + \phi'(x)^2}} - \frac{1}{M} \hat{F}_r$$

$$\text{con: } \hat{F}_r = \begin{cases} F_r & \text{se } v > 0 \\ -F_r & \text{se } v < 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $\phi'(x)$ è definito come nel caso precedente

Soluzione (Q2)

L'EDO si può risolvere di nuovo con il metodo di Eulero

- La soluzione sono i due vettori $x(t_k)$ e $v(t_k)$

A questo punto, sfruttando l'interpolazione lineare di $x(t_k)$ e $v(t_k)$:

- Identifichiamo un istante di tempo t^* tale che:
  - $v(t^*) \simeq 0$, i.e. la velocità è nulla
  - $\dot{v}(t^*) \simeq 0$, i.e. l'accelerazione è nulla
  - $\dot{v}(t^*)$ si può calcolare con l'espressione usata per l'EDO
  - La palla si ferma se sia la velocità che l'accelerazione sono nulle
  - NOTA: la lezione registrata contiene un errore in questo punto
- Il valore di $x(t^*)$ risponde a Q2

Soluzione (Q3)

- Se la palla andasse sempre in avanti (da sx verso dx)
- Allora la strada percorsa sarebbe data da:

$$L = \int_{x_a}^{x(t^*)} \sqrt{1 + \phi'(x)^2}\, dx$$

Purtroppo però la palla può anche <u>tornare indietro</u>

- Quando la palla si muove da dx verso sx...
- ...Sta ancora percorrendo della strada

Come tenerne conto?

Soluzione (Q3)

Una possibile soluzione: sfruttiamo il vettore $x(t_k)$

- Quando ci spostiamo da $x(t_k)$ a $x(t_{k+1})$ …
- La lunghezza del tratto di curva percorso è approssimativamente:

$$\sqrt{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2}$$

- Dove $y(t_k) = \phi(x(t_k))$

Quindi la strada percorsa è data da:

$$L = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2}$$

- Dove n è il numero di elementi nel vettore t

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio 4 (Analisi)

Esercizio 4

Si consideri lo script seguente:

```
function y = f(x)
     t = x(end:-1:1);
     y = x + t;
end

x = f([1, 2, 3, 4])
t = (x == 5)
```

- Che cosa stampa?
- Si motivi (intuitivamente) la risposta

Soluzione

```
function y = f(x)
    t = x(end:-1:1); % t è x, in ordine invertito
    y = x + t;
end

% f([1,2,4,4]) restituisce [1,2,4,4] + [4,4,2,1]
% Quindi viene stampato: [5, 6, 6, 5]
x = f([1, 2, 4, 4])
% (x == 5) restituisce un vettore, che contiene il valo
% per le posizioni in x che soddisfano l'uguaglianza
% Quindi viene stampato: [1, 0, 0, 1]
t = (x == 5)
```

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio 5 (Analisi)

Esercizio 5

Si consideri lo script seguente:

```
function y = f(x, v)
    t = x(x <= v);
    y = sum(t);
end

M = [1, 2, 1, 3, 1, 3];
f(M, 1)
f(M, 2)
```

- Che cosa stampa?
- Si motivi (intuitivamente) la risposta

Soluzione

```
function y = f(x, v)
    % Se x = [1,2,1,3,1,3] e v è 2
    % Allora (x <= v) è [1,1,1,0,1,0]
    % E x(x <= v) è [1,2,1,1]
    t = x(x <= v);
    y = sum(t);
end

M = [1, 2, 1, 3, 1, 3];
f(M, 1) % Stampa sum([1,1,1]), quindi 3
f(M, 2) % Stampa sum([1,2,1,1]), quindi 5
```

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio 6 (codifica)

Esercizio 6

Si codifichi la funzione:

```
function x = midpoint(f, x0, t)
```

Che risolve una EDO con il metodo del punto intermedio

- `f` è una funzione che calcola la derivata dello stato corrente:

  ```
  function  dx = f(x, t)
  ```

  - `x` è lo stato (uno scalare), `t` è l'istante di tempo corrente
- `x0` è il valore iniziale dello stato (uno scalare)
- `t` è il vettore dei tempi per cui va determinato lo stato

Si discuta brevemente il metodo

Soluzione

Il metodo del punto intermedio risolve una EDO in base all'iterazione:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + (t^{(k+1)} - t^{(k)}) f(x_m^{(k)}, t_m^{(k)})$$

$$\text{con: } t_m^{(k)} = \frac{1}{2}(t^{(k+1)} + t^{(k)})$$

$$\text{e: } x_m^{(k)} = x^{(k)} + (t_m^{(k+1)} - t^{(k)}) f(x^{(k)}, t^{(k)})$$

- $t_m^{(k)}$ è l'istante di tempo a metà tra $t^{(k)}$ e $t^{(k+1)}$
- $x_m^{(k)}$ è il corrispondente valore dello stato
- $x_m^{(k)}$ viene approssimato con il metodo di Eulero
- $f(x_m^{(k)}, t_m^{(k)})$ è la derivata dello stato nel punto intermedio

Soluzione

Una possibile codifica:

```
function x = midpoint(f, x0, t)
    x(1) = x0;
    for ii = 1:length(t)-1
        tm = t(ii+1) + t(ii); % Punto intermedio
        df = f(x(ii), t(ii)); % Derivata in t(ii)
        % Ora ottengo lo stato nel punto intermedio
        xm = x(ii) + (tm - t(ii)) .* df;
        % Prossimo stato
        dt = t(ii+1) - t(ii);
        x(ii+1) = x(ii) + dt .* f(xm, tm);
    end
end
```